

VADEMECUM SUL CALCOLO DELLA LATITUDINE DI UN LUOGO

UTILIZZANDO IL SOLE COME RIFERIMENTO

Premessa

Per l'uomo la necessità di conoscere la propria posizione ed orientarsi è sempre stata di fondamentale importanza. Non conoscendo confini e non potendo misurare lunghe distanze, avere informazioni circa la propria posizione dopo giorni o addirittura mesi di cammino o navigazione era una condizione necessaria per la propria sopravvivenza.

Diversamente dalla longitudine, la cui misurazione precisa riuscì solamente a metà del XVIII secolo grazie all'invenzione e costruzione del cronometro marino ad opera del britannico John Harrison, la misurazione della latitudine di un luogo avveniva già ai tempi degli Arabi grazie ad uno strumento noto come astrolabio nautico (derivato da quello astronomico), precursore del sestante, quest'ultimo usato successivamente dai grandi navigatori del XV secolo che attraversarono gli oceani.

Lo scopo di questo vademecum è quello di fornire una breve guida su come calcolare la latitudine del proprio luogo utilizzando il Sole come riferimento.

Breve ripasso di concetti di geografia e geometria

Prima di definire cos'è la latitudine, ripassiamo velocemente alcuni concetti fondamentali di geografia e geometria necessari per poter avere chiaro ciò che verrà esposto nella sezione "Procedura pratica" di questo vademecum.

Dagli studi scolastici dovremmo ricordarci che la posizione di un punto P in un piano è determinata, fissato un sistema di riferimento e la sua origine O, da due coordinate cartesiane chiamate X_P e Y_P ovvero l'ascissa e l'ordinata del punto. Esiste un'altra possibilità di determinare la posizione di un punto P in un piano utilizzando le coordinate polari; conoscendo la distanza r_P dall'origine del sistema di riferimento e un angolo misurato dall'asse delle ascisse positive Θ_P .

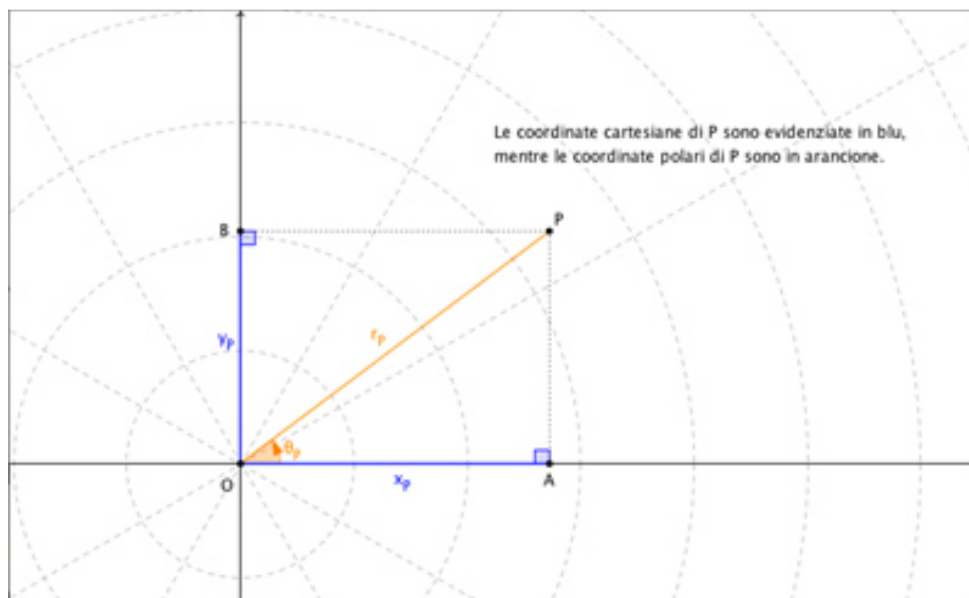


Immagine [1]

La questione si complica però se ci spostiamo da un piano a due dimensioni allo spazio a tre dimensioni e soprattutto se dobbiamo calcolare la posizione di un punto su una superficie sferica, come possiamo ritenere, almeno in prima approssimazione, la nostra Terra.

Dalla geografia sappiamo che la Terra è stata divisa da linee immaginarie, orizzontali e verticali, atte a formare una specie di griglia o reticolato, e che consentono di definire le coordinate geografiche di un punto sulla Terra. Queste linee sono chiamate **paralleli** e **meridiani**.

I primi sono circonferenze formate dall'intersezione tra la sfera terrestre e una serie di piani perpendicolari all'asse terrestre (vedi immagine [2]). La circonferenza avente maggior diametro è chiamata **equatore** e divide la Terra in due emisferi uguali, l'emisfero nord (o boreale) e l'emisfero sud (o australe).

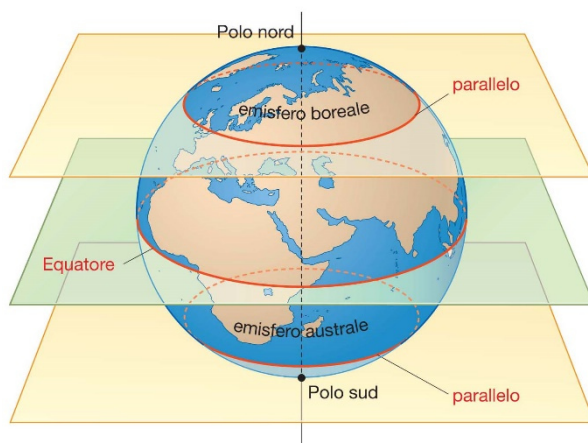


Immagine [2]

Dall'intersezione tra la sfera terrestre e una serie di piani passanti per i poli si formano delle circonferenze; le linee di queste circonferenze che vanno dal polo nord al polo sud sono chiamate **meridiani** (immagine [3]).

Il meridiano fondamentale è il cosiddetto **meridiano di Greenwich**, passante per l'omonima città in provincia di Londra che gli dà il nome, che divide la Terra in maniera immaginaria in una parte est, a destra di Greenwich, e in una ovest, a sinistra della città.

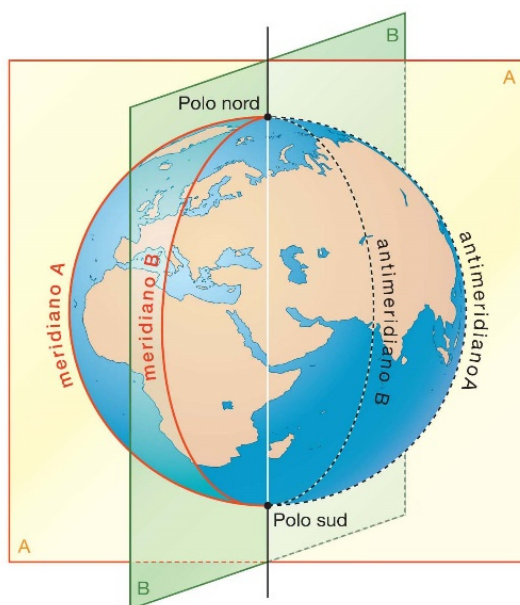


Immagine [3]

Per determinare la posizione di un punto sulla superficie terrestre si usano quindi come riferimenti l'equatore e il meridiano fondamentale di Greenwich. Osservando l'immagine [4], definiamo ora:

- la **latitudine** come la distanza angolare (misurata in gradi) lungo l'arco di meridiano compreso tra l'equatore e il parallelo passante per il punto P.
- la **longitudine** come la distanza angolare (misurata in gradi) lungo l'arco di parallelo compreso tra il meridiano fondamentale e il meridiano passante per il punto P.

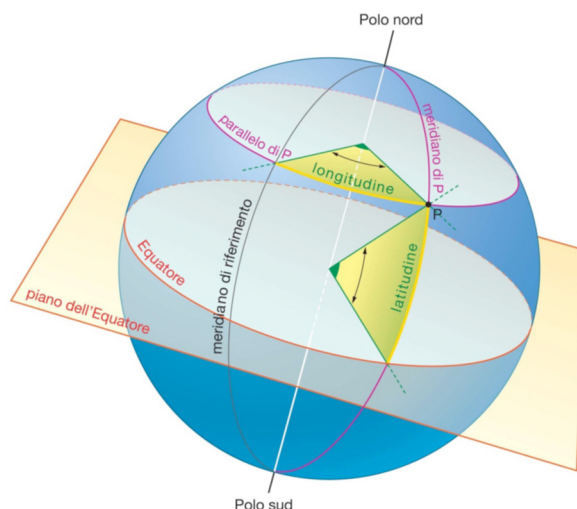


Immagine [4]

La latitudine è Nord, da 0° (equatore) a 90° (polo nord), se riguarda la parte di emisfero boreale, si parla di latitudine Sud in maniera esattamente opposta, da 0° (equatore) a 90° (polo sud). A est del meridiano di Greenwich si parla di longitudine orientale misurata da 0° a 180° , a ovest di longitudine ovest anche sempre da 0° a 180° . Il meridiano avente per longitudine 180° è esattamente dalla parte opposta di quello di Greenwich ed è il suo l'antimeridiano.

Abbiamo quindi capito che ogni punto sulla superficie terrestre può essere definito da una coppia di coordinate che di norma vengono scritte citando prima la latitudine e poi la longitudine. Ad esempio Padova si trova a queste coordinate $45^\circ 24' 23''$ N e $11^\circ 52' 40''$ E. Noterete che oltre ai gradi vengono indicati i primi (') e secondi di grado ("). In breve, i primi corrispondono alla 60esima parte del grado, mentre i secondi d'arco corrispondono alla 60esima parte del primo ovvero alla 3600esima parte del grado.

Sappiamo che, mentre la Terra compie il suo moto di rotazione attorno al suo asse, il Sole si sposta apparentemente da est verso ovest. In questo movimento compie una curva che culmina, ovvero ha il suo apice, al cosiddetto meridiano del luogo, cioè a sud. Vedete l'immagine [5] qui sotto composta da una serie di foto scattate ad intervalli regolari.

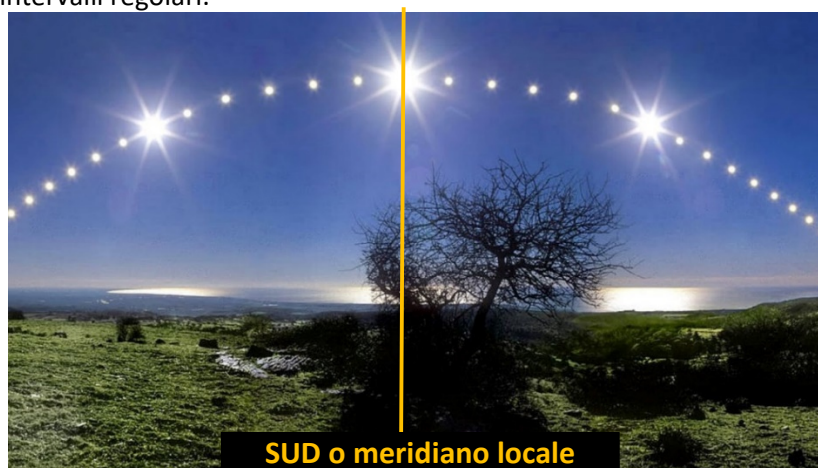


Immagine [5]

Studio dell'ombra del Sole agli equinozi

Come facciamo quindi a calcolare la latitudine del nostro luogo usando il Sole come riferimento visto che è in continuo movimento apparente? Quando dobbiamo prenderlo a riferimento e con quali strumenti?

Analizzando l'immagine [6] qui sotto, in particolare quella dell'equinozio di primavera, si nota che per una parte della Terra è giorno per un'altra è notte e che la linea fittizia che delimita la parte illuminata dalla parte in ombra (chiamata terminatore) passa indicativamente per Londra, supponiamo per il meridiano fondamentale di Greenwich. In quel momento a Greenwich e in tutti i luoghi di quel meridiano albeggia e, a mezzogiorno, dopo circa 6h ovvero dopo un quarto di rotazione terrestre, il Sole sarà a sud ovvero al meridiano. I raggi quindi arriveranno sulla Terra con un'inclinazione il cui angolo è complementare alla latitudine del luogo. **NOTA:** Due angoli si dicono complementari quando la loro somma dà come risultato 90° (angolo retto). All'equatore i raggi arrivano a 90° latitudine 0° , al polo nord i raggi arrivano radenti quindi a 0° latitudine 90° N, al circolo polare artico i raggi arrivano inclinati di $23^\circ 27'$, che è appunto il complementare a 90° della latitudine del luogo $66^\circ 33'$ N. Cosa analoga avviene anche durante l'equinozio di autunno.

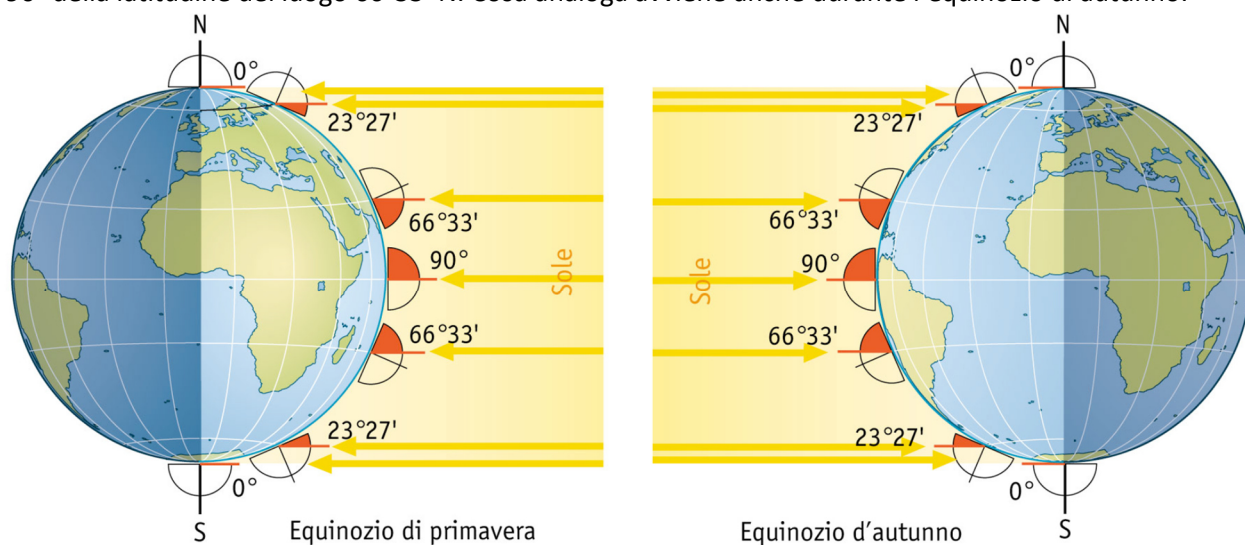


Immagine [6]

Iniziamo quindi a introdurre un breve cenno del tipo di calcolo che ci apprestiamo a fare usando come riferimento visivo il Sole e in particolare l'inclinazione dei suoi raggi che giungono a Terra. I dettagli pratico-operativi saranno mostrati più avanti nella sezione di questo vademecum chiamata **"Procedura pratica"**.

Con lo stesso principio adottato dalle meridiane, orologi solari usati come strumento di misurazione del tempo basati sul rilevamento della posizione del Sole; se piantiamo perpendicolarmente nel terreno un paletto di legno o qualsiasi oggetto sottile (chiamato in gergo gnomone), i raggi del Sole proietteranno sul terreno l'ombra dell'oggetto con un'inclinazione il cui angolo è complementare alla latitudine del luogo.

Volendo fare uno schema che mostri il perché geometrico di quanto appena detto, basta dare uno sguardo all'immagine [7] qui sotto – che riprende la configurazione Terra-Sole indicata nell'immagine [6] – in cui si mostrano il punto di misura P, il nostro orizzonte, i raggi solari, il nostro gnomone e la sua ombra sul terreno identificata con il segmento PQ.

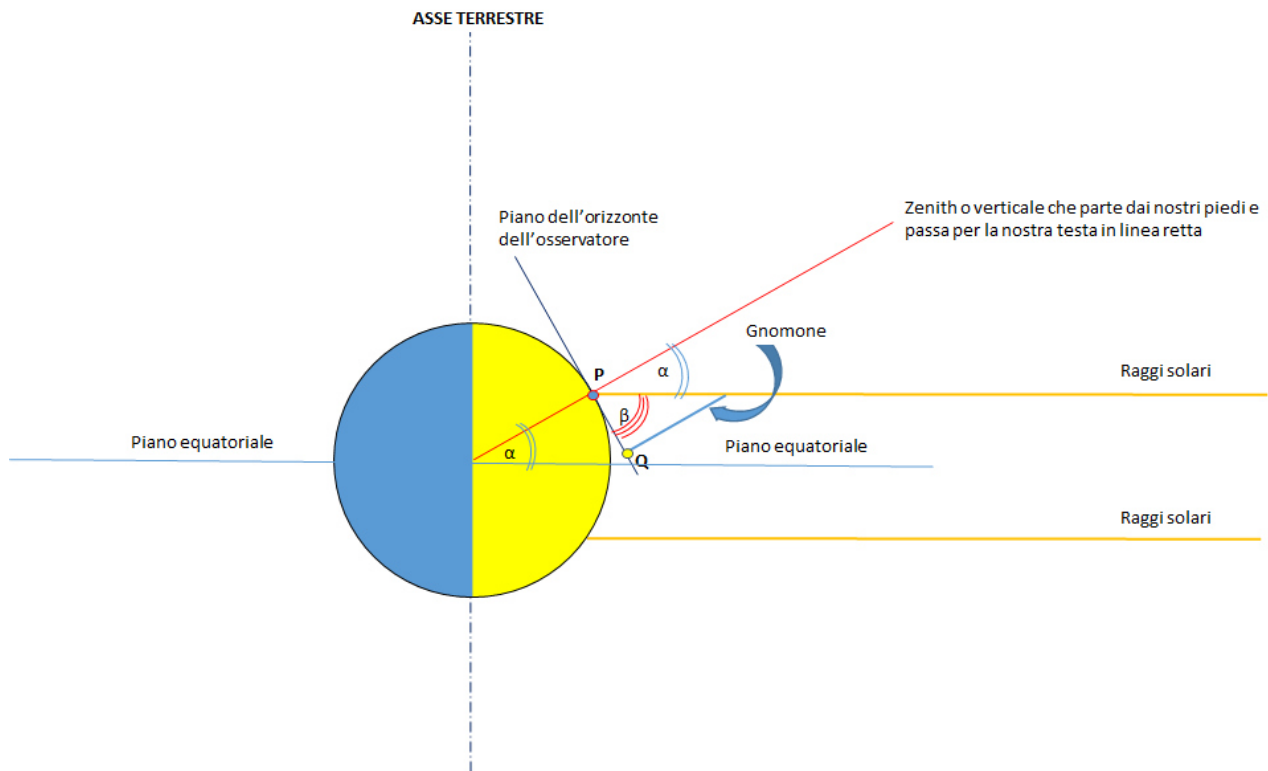


Immagine [7]

L'angolo β che i raggi formano è il complementare di α che è la latitudine del luogo.

Per calcolare quindi la latitudine, durante gli equinozi, usando l'ombra del nostro gnomone, si può usare la seguente formula ricavata, guardando lo schema sopra, applicando la geometria.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \quad [\text{Formula nr. 1}]$$

I raggi che arrivano con inclinazione β sono quindi complementari alla latitudine del luogo α .

Considerazioni sulla posizione della Terra durante la sua orbita

Solo durante gli equinozi i raggi arrivano inclinati con un angolo complementare alla latitudine del luogo.

Perché non è sempre corretto ritenere che il Sole quando è a sud proietta i raggi con un'inclinazione complementare alla latitudine del luogo?

Perché dobbiamo tenere conto dell'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano di rivoluzione della Terra attorno al Sole. L'asse di rotazione terrestre è inclinato di circa $23,5^\circ$ ($23^\circ 27'$) rispetto al piano dell'orbita (vedere Immagine [8]).

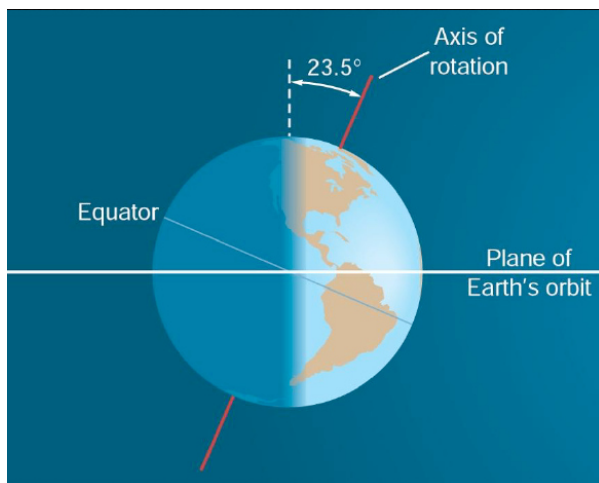


Immagine [8]

Questa inclinazione fa sì che, durante il moto di rivoluzione attorno al Sole (vedere immagine [9]), la Terra si presenti verso la nostra stella con inclinazioni differenti. Questo comporta una serie di conseguenze, quella più importante è la diversa inclinazione dei raggi che giungono alla Terra (vedere immagine [10]). Questo avviene ogni singolo giorno dell'anno (le stagioni variano proprio per questo motivo).

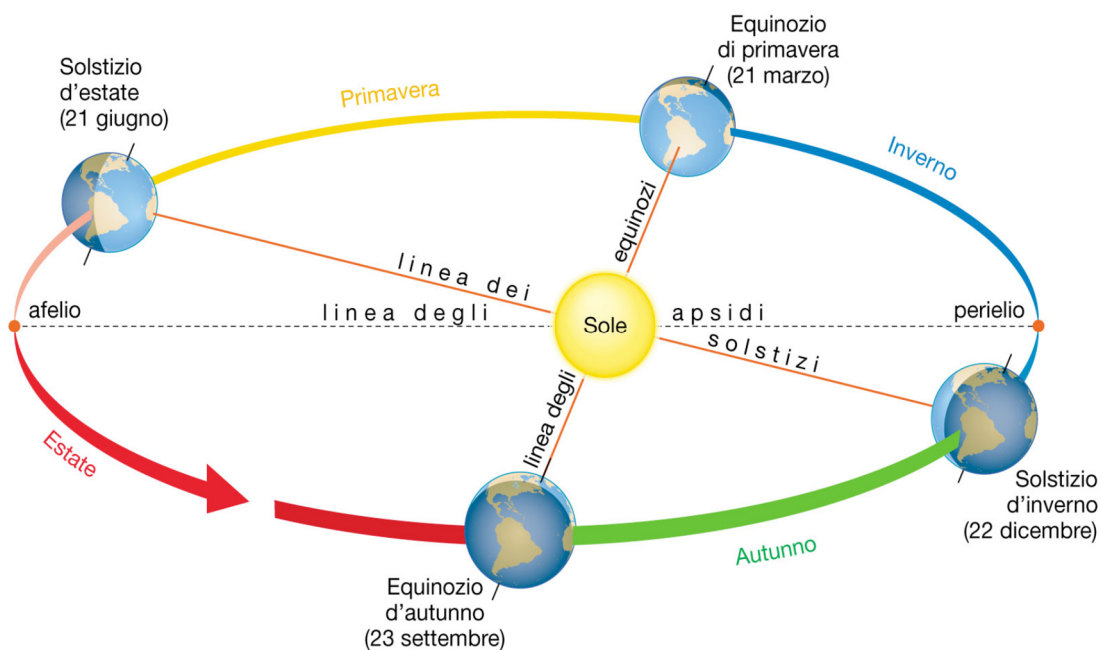


Immagine [9]

Ne consegue che esistono 3 configurazioni notevoli che sono gli equinozi (marzo e settembre) e 2 solstizi (giugno e dicembre), durante i quali, come è facile osservare dall'immagine [10] qui sotto, l'inclinazione dei raggi solari è diversa.

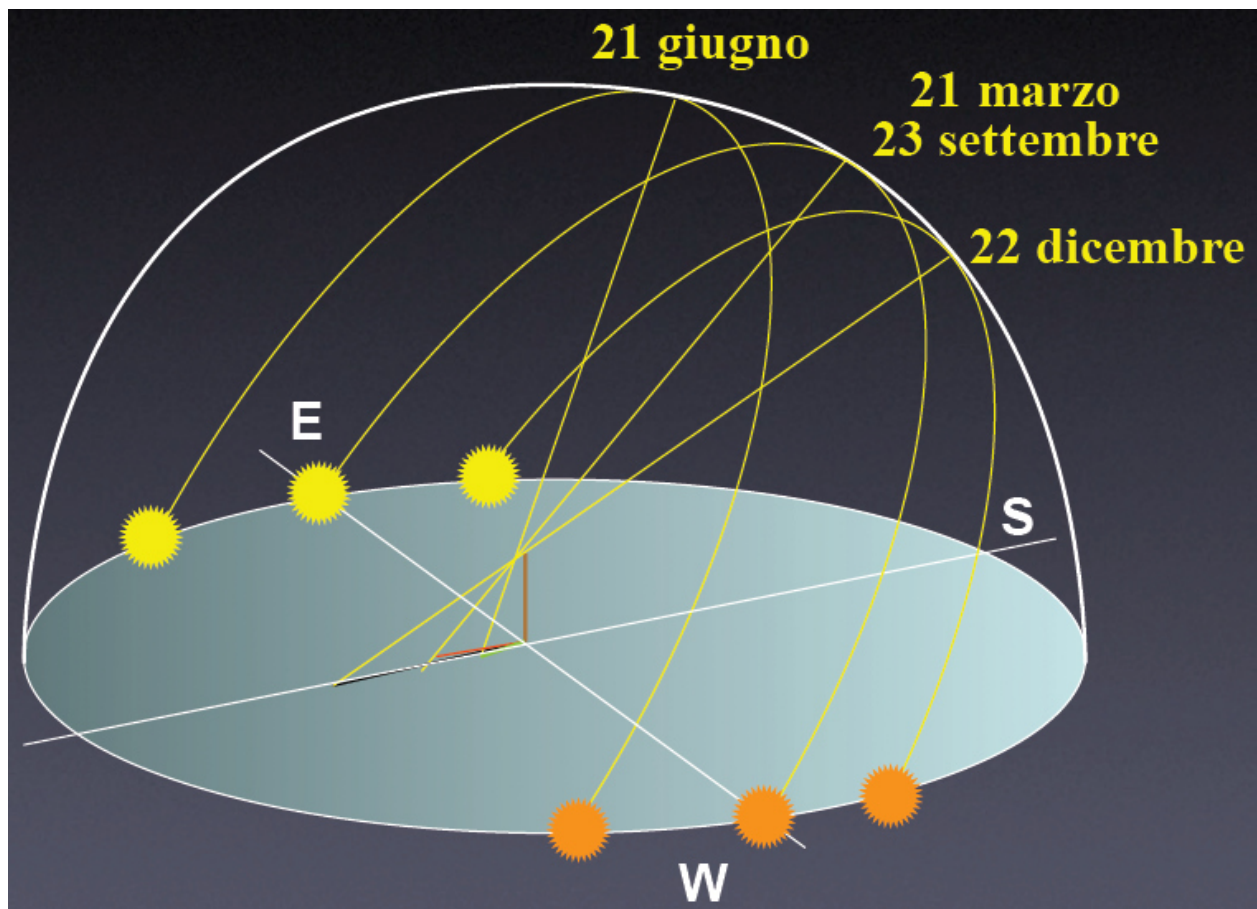


Immagine [10]

Studio dell'ombra del Sole ai solstizi

Durante i solstizi di estate e di inverno si deve considerare quindi il valore dell'inclinazione dell'asse terrestre. Noterete infatti dall'immagine [11] qui sotto, come al polo nord, durante l'estate, i raggi solari arrivino con inclinazione esattamente pari al valore dei gradi di inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano della sua orbita ovvero $23^{\circ} 27'$. Lo stesso avviene al polo sud, durante il solstizio di inverno.

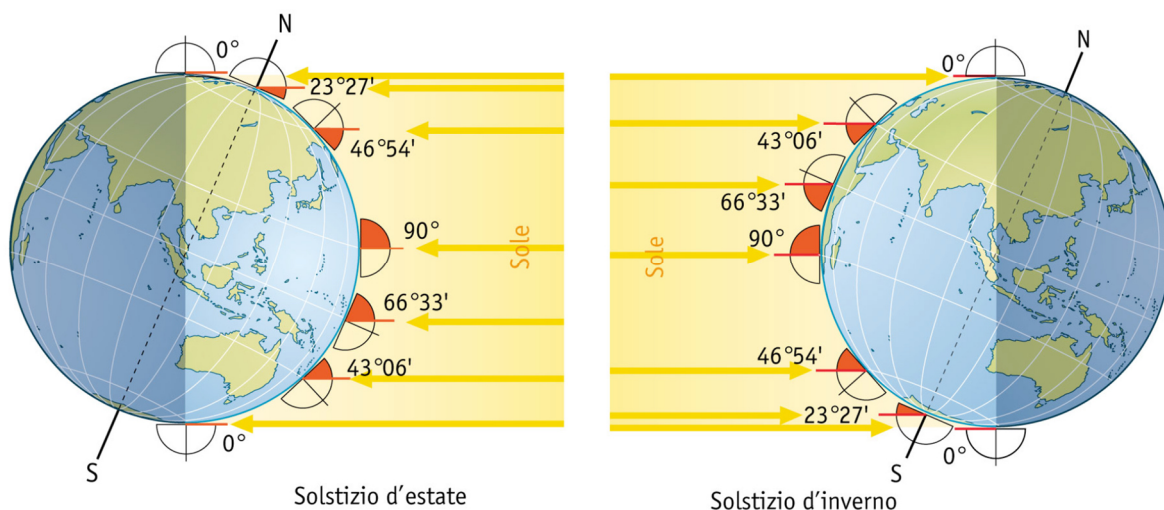


Immagine [11]

Così come fatto per la condizione degli equinozi, anche per i solstizi, riporto qui sotto uno schema (Immagine [12]), che evidenzia il perché nel calcolo va considerato geometricamente il valore dell'inclinazione dell'asse terrestre. Nello schema noterete l'introduzione di un altro parametro chiamato **declinazione** e indicato con la lettera greca δ (delta). La declinazione è l'angolo tra i raggi solari ed il piano equatoriale. La declinazione varia periodicamente ed in funzione del giorno dell'anno, assumendo un valore tra un massimo di $+23^{\circ} 27'$ (solstizio d'estate) ed un minimo di $-23^{\circ} 27'$ (solstizio d'inverno). **NB:** Il segno meno indica che il Sole è al di sotto del piano equatoriale.

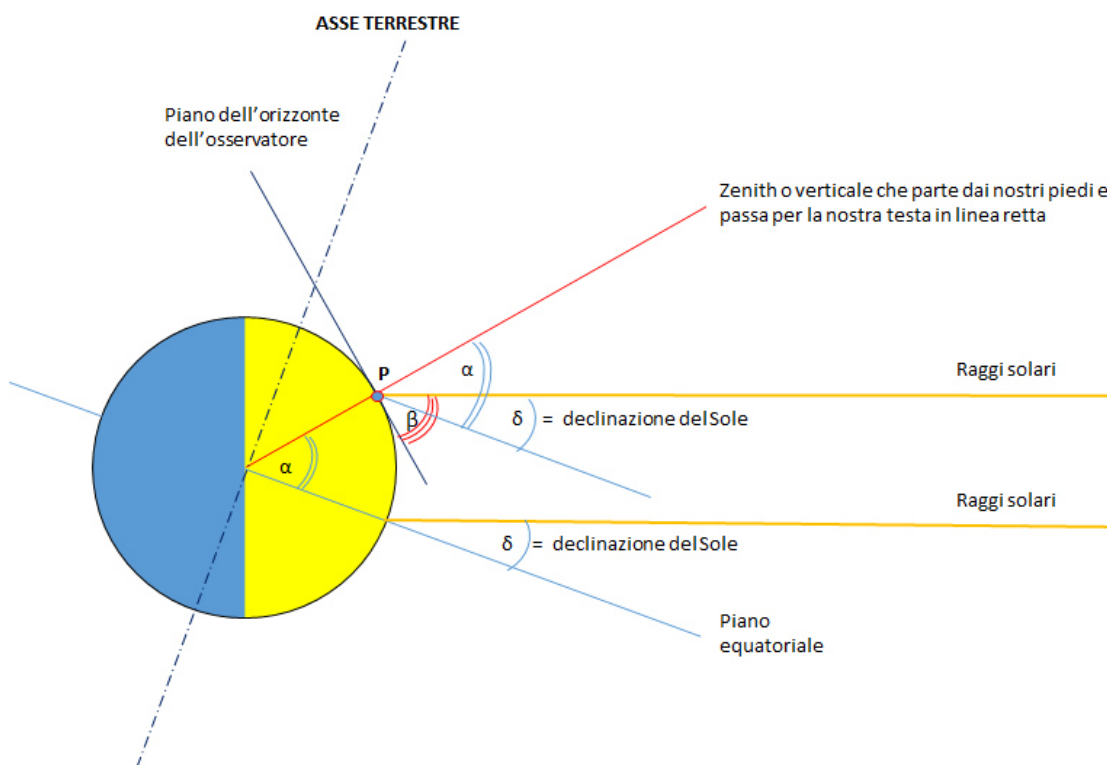


Immagine [12]

Dallo schema sopra – che si rifà all’immagine [11] – definiamo β come l’altezza a cui ci apparirà il Sole al solstizio di estate.

Per calcolare quindi la latitudine di un luogo durante il solstizio, usando l’ombra del nostro gnomone, dobbiamo usare la seguente formula ricavata guardando lo schema sopra e usando la geometria.

$$\alpha - \delta + \beta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta + \delta \quad [\text{Formula nr. 2}]$$

Quindi δ è noto ed è pari a $23^\circ 27'$ al solstizio di estate, β lo ricaviamo con l’ombra dello gnomone, abbiamo dunque la nostra latitudine α .

Uno schema analogo – che si rifà all’immagine [11] – lo si può fare anche per il solstizio di inverno

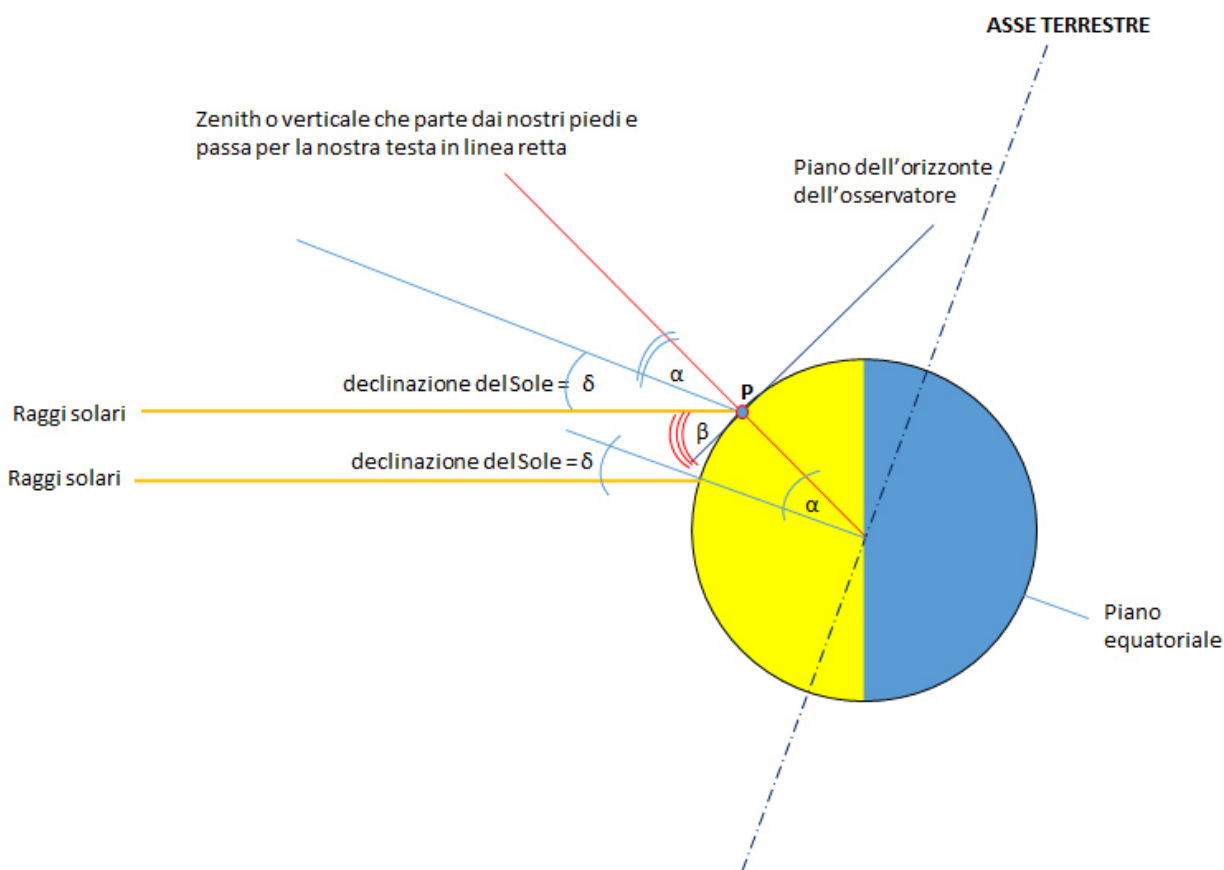


Immagine [13]

Per calcolare quindi la latitudine, durante il solstizio d’inverno, usando l’ombra del nostro gnomone, dobbiamo usare la seguente formula ricavata guardando lo schema sopra e usando la geometria.

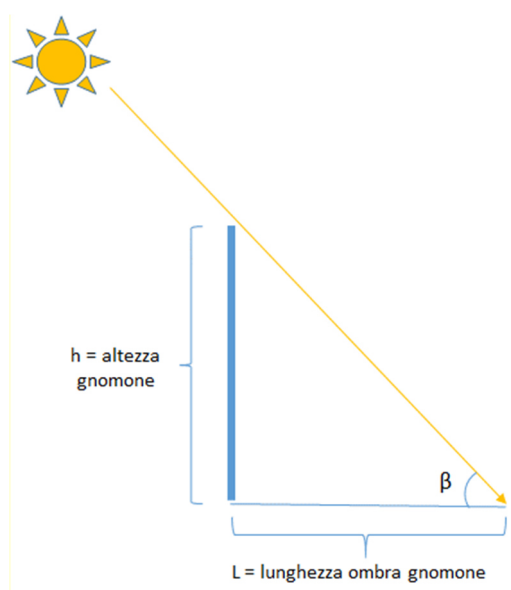
$$\alpha + \delta + \beta = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta - \delta \quad [\text{Formula nr. 3}]$$

Quindi δ è noto ed è pari a $-23^\circ 27'$ (*) al solstizio di inverno, β lo ricaviamo con l’ombra dello gnomone, abbiamo dunque la nostra latitudine.

(*) NOTA: Il segno negativo è una convenzione e indica che il Sole è al di sotto del piano equatoriale che, intersecato con la sfera celeste, genera l’equatore celeste. Nella formula però non va usato il valore negativo ma va preso il valore “geometrico” dell’angolo.

Misurazione durante gli equinozi

Ci troveremo in una condizione come questa:



Dalla trigonometria sappiamo che il rapporto tra la lunghezza dello gnomone (h) e della sua ombra (L) è la tangente dell'angolo β . Dalla funzione inversa della tangente troviamo dunque l'angolo β .

Nel caso di Padova, dovreste trovare un'ombra di lunghezza pari a quella dello gnomone. Supponendo infatti di avere uno gnomone di 20 cm l'ombra dovrà essere di 20 cm.

$$\text{tg}(\beta) = h/L = 20/20 = 1$$

NOTA: Sempre nel caso di Padova, se hai uno gnomone con altezza differente, ricorda che comunque il rapporto tra lunghezza gnomone e la lunghezza della sua ombra è pari a 1.

$$\beta = \text{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$$

Usando la **formula nr. 1** avremo

$$\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

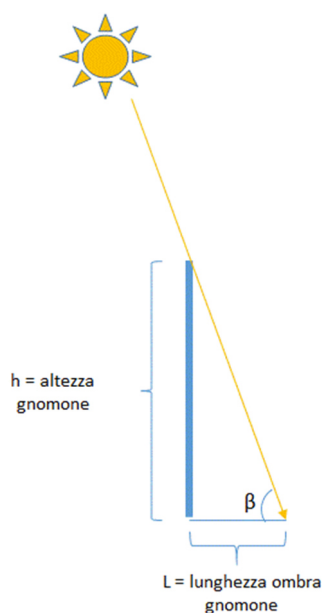
$$\begin{array}{r} 90^\circ 00' \\ - 45^\circ 00' \\ \hline 45^\circ 00' \end{array}$$

45° valore prossimo alla latitudine di Padova (45°24'). Errore all'interno di un raggio di 40 Km

NOTA: per altre latitudini la lunghezza dell'ombra sarà differente, e di conseguenza anche il valore di β , ma il processo indicato sopra è il medesimo.

Misurazione durante il solstizio d'estate

Ci troveremo in una condizione come questa:



Nel caso di Padova, supponendo di avere uno gnomone di 30 cm l'ombra dovrà essere di poco più di 12 cm.

$$\operatorname{tg}(\beta) = h/L = 30/12 = 2,5$$

NOTA: Se hai uno gnomone con altezza differente ricorda che comunque il rapporto tra lunghezza gnomone e la lunghezza della sua ombra è pari a circa 2,5

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}(2,5) = 68^{\circ} 11'$$

Usando la **formula nr. 2** avremo

$$\alpha = 90^{\circ} - 68^{\circ}11' + 23^{\circ}27'$$

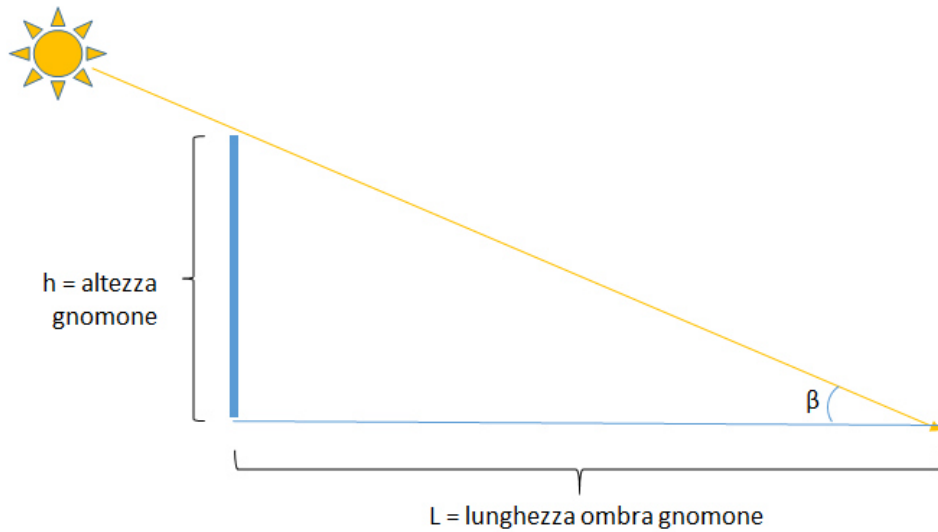
$$\begin{array}{rcl} 90^{\circ} 00' & - & \\ 68^{\circ} 11' & + & \\ \hline 23^{\circ} 27' & = & \\ \hline 45^{\circ} 16' & & \end{array}$$

45°16' è un dato molto prossimo alla latitudine di Padova (45°24'). Errore all'interno di un raggio di 14 Km

NOTA: per altre latitudini la lunghezza dell'ombra sarà differente, e di conseguenza anche il valore di β , ma il processo indicato sopra è il medesimo.

Misurazione durante il solstizio d'inverno

Ci troveremo in una condizione come questa:



Nel caso di Padova, supponendo di avere un gnomone di 30 cm l'ombra dovrà essere di poco più di 78 cm.
ATTENZIONE: Si consiglia di usare un gnomone più corto per poter prendere le misure all'interno del foglio

$$\operatorname{tg}(\beta) = h/L = 30/78 = 0,38$$

NOTA: Se hai un gnomone con altezza differente ricorda che comunque il rapporto tra lunghezza dello gnomone e la lunghezza della sua ombra è pari a **0,38**

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}(0,38) = 21^{\circ} 2'$$

Usando la **formula nr. 3** avremo

$$\alpha = 90^{\circ} - 21^{\circ} 02' - 23^{\circ} 27'$$

$$\begin{array}{rcl} 90^{\circ} 00' & - & \\ 21^{\circ} 02' & - & \\ \hline 23^{\circ} 27' & = & \\ \hline 45^{\circ} 31' & & \end{array}$$

45° 31' è un dato molto prossimo alla latitudine di Padova (45°24'). Errore all'interno di un raggio di 13 Km

NOTA: per altre latitudini la lunghezza dell'ombra sarà differente, e di conseguenza anche il valore di β , ma il processo indicato sopra è il medesimo.

Misurazione durante un giorno diverso da solstizi ed equinozi

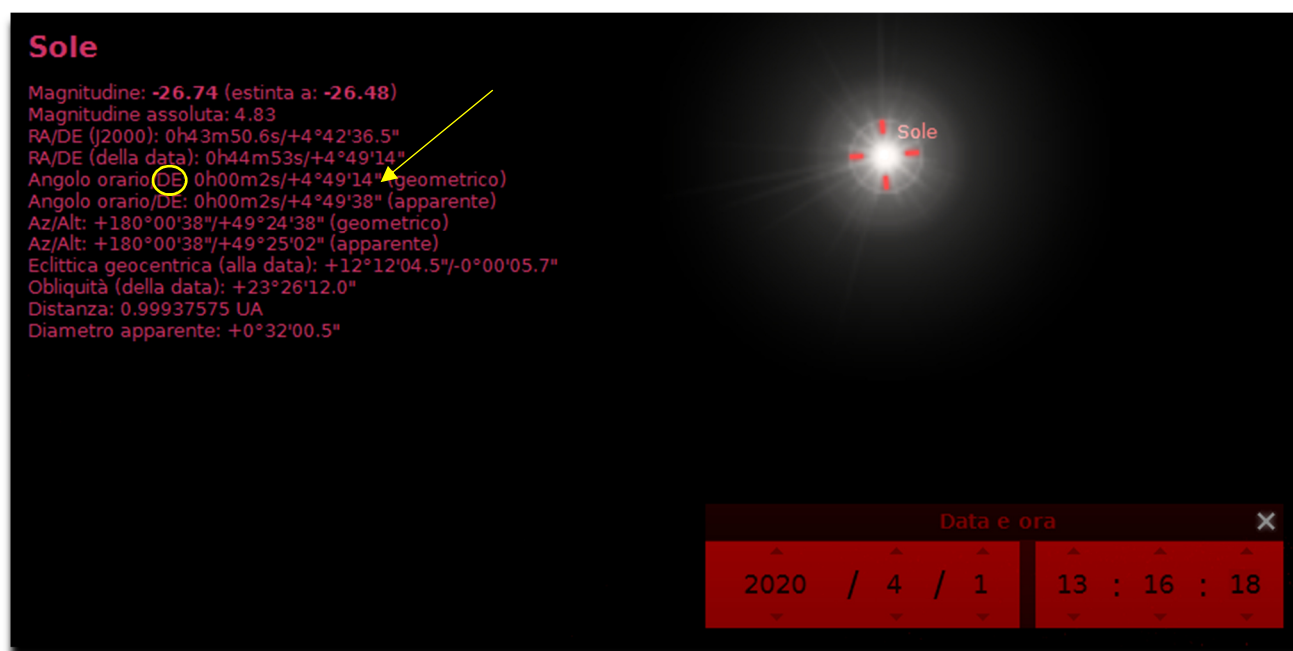
Nelle misurazioni di cui abbiamo riportato il procedimento i valori della declinazione pari a 0° e pari a $23^\circ 27'$ valgono solo rispettivamente nei giorni dell'equinozio o nei solstizi.

Abbiamo infatti detto che la declinazione del Sole, ovvero per noi la sua altezza sull'orizzonte, varia ogni giorno dell'anno.

Se voglio invece condurre delle misurazioni in altri giorni dell'anno? Come faccio a conoscere il valore della declinazione solare? Per calcolare il valore della declinazione del Sole si potrebbe utilizzare un procedimento che è un po' complicato e porterebbe a discostarsi dallo scopo del presente vademecum che è quello di mantenere il più possibile semplice la procedura di calcolo della latitudine del luogo usando il Sole come riferimento. Pertanto, per semplicità, ne ometto il procedimento.

Per conoscere la declinazione solare è sufficiente quindi scaricare nel proprio smartphone delle applicazioni quali ad esempio Stellarium, Mappa Stellare, ecc. che sono molto semplici da usare e consentono di conoscere in tempo reale come appaiono stelle, pianeti, corpi celesti nel cielo; ci dà al tempo stesso informazioni su di loro, come ad esempio nome, coordinate e distanza e vari parametri tra i quali la declinazione. In alternativa si possono cercare nel web siti attendibili per conoscere le effemeridi del Sole in un dato luogo.

Riporto qui uno screenshot di Stellarium in cui indico il valore della declinazione del Sole al meridiano il 01/04/2020 giorno in cui ho svolto l'esperienza pratica che riporto più avanti.



Recuperato il parametro declinazione, a seconda del periodo dell'anno in cui ci troviamo, lo inseriamo nelle formule indicate sopra. Allo scopo vi riporto qui di seguito una matrice per facilitare il compito nel capire quando e quali formule usare.

Periodo	01 gen 19 mar	20 mar Equinozio primavera	21 mar 19 giu	20 giu Solstizio d'estate	21 giu 21 set	22 sett Equinozio autunno	23 sett 20 dic	21 dic Solstizio di inverno	22 dic 31 dic
Formula Nr.	3	1	2	2	2	1	3	3	3

Procedura pratica

Ora che abbiamo capito che tipo di informazioni ci dà “l'altezza” del Sole rispetto all'orizzonte dobbiamo trovare il metodo da seguire per capire quando il Sole è al meridiano cioè a sud.

Se fossimo dotati di una bussola magnetica, sarebbe facile prendere la misura dell'ombra che il nostro gnomone proietta a terra quando il Sole è esattamente a sud ed eseguire alcuni calcoli che vedremo nel dettaglio tra poco.

E se non avessimo una bussola? Come possiamo capire quando il Sole è esattamente al meridiano?

Potremmo decidere di guardare l'orologio e alle 12:00 in punto eseguire le misure. Anche qui non possiamo fare sempre questa assunzione in quanto ci sono due aspetti da considerare.

Il primo, potremmo sbagliare quando siamo in regime di ora legale ed effettuare le misure quando il nostro orologio segna le ore 12; purtroppo sappiamo che non sono le **VERE** ore 12 solari ma sono le 11.

Il secondo aspetto riguarda l'effettivo passaggio del Sole al meridiano alle ore 12. Non sempre alle ore 12 solari il Sole è effettivamente a sud. A causa dell'azione combinata tra l'inclinazione dell'asse terrestre e l'eccentricità dell'orbita della Terra durante il corso dell'anno, il Sole anticipa o ritarda il suo passaggio al meridiano rispetto alle ore 12 solari. Questo ritardo o anticipo dipende dalla nostra latitudine e può essere addirittura di 16 minuti. La legge che tiene conto di questi anticipi/ritardi si chiama “Equazione del tempo” di cui si potrebbe tenere conto ma non ne tratto in questo semplice vademecum.

E allora come possiamo ovviare a tutti questi problemi senza pensarci?

Dobbiamo semplicemente ricordare quanto detto all'inizio. Cioè che il Sole, in qualsiasi momento dell'anno, compie un movimento apparente da est a ovest tracciando in cielo una curva che ha il suo apice proprio al meridiano. Riprendiamo per un momento l'immagine qui sotto.



Immagine [14]

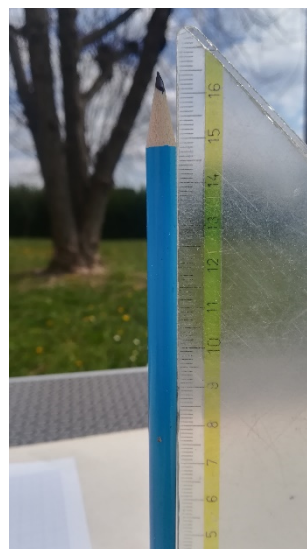
L'ombra del nostro gnomone sarà lunga ad inizio giornata e man mano che il Sole sale quest'ombra, seguendo una traiettoria curvilinea come quella della nostra stella, si accorcia, raggiungendo la sua minima estensione proprio quando il Sole è nel suo punto più alto e quindi a sud ovvero al meridiano.

Per poter tracciare la curva e fare questa misurazione dobbiamo avere questo semplice materiale

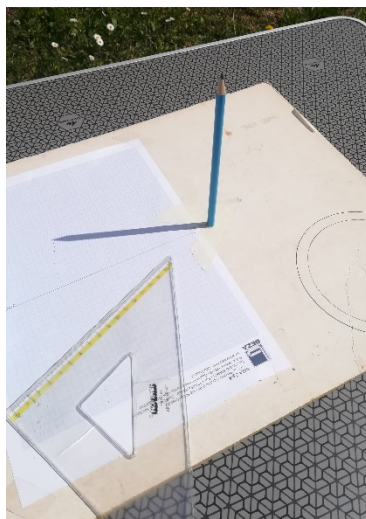
- 1 tavoletta o supporto piano rigidi
- 1 matita
- 1 oggetto possibilmente lungo e sottile che fungerà da gnomone (es: matita appuntita, chiodo, ecc)
- cronometro
- carta millimetrata possibilmente ma non necessariamente
- livella o in alternativa il cellulare con una applicazione per determinare se la tavoletta è in piano
- squadra da disegno da 30° o 60°

Procedimento:

- 1) mettere in piano con una bolla la tavoletta su cui avrete incollato la carta millimetrata
- 2) posizionare sulla tavoletta il nostro gnomone in posizione verticale avendo l'accortezza che sia perpendicolare alla tavoletta usando la squadra da disegno



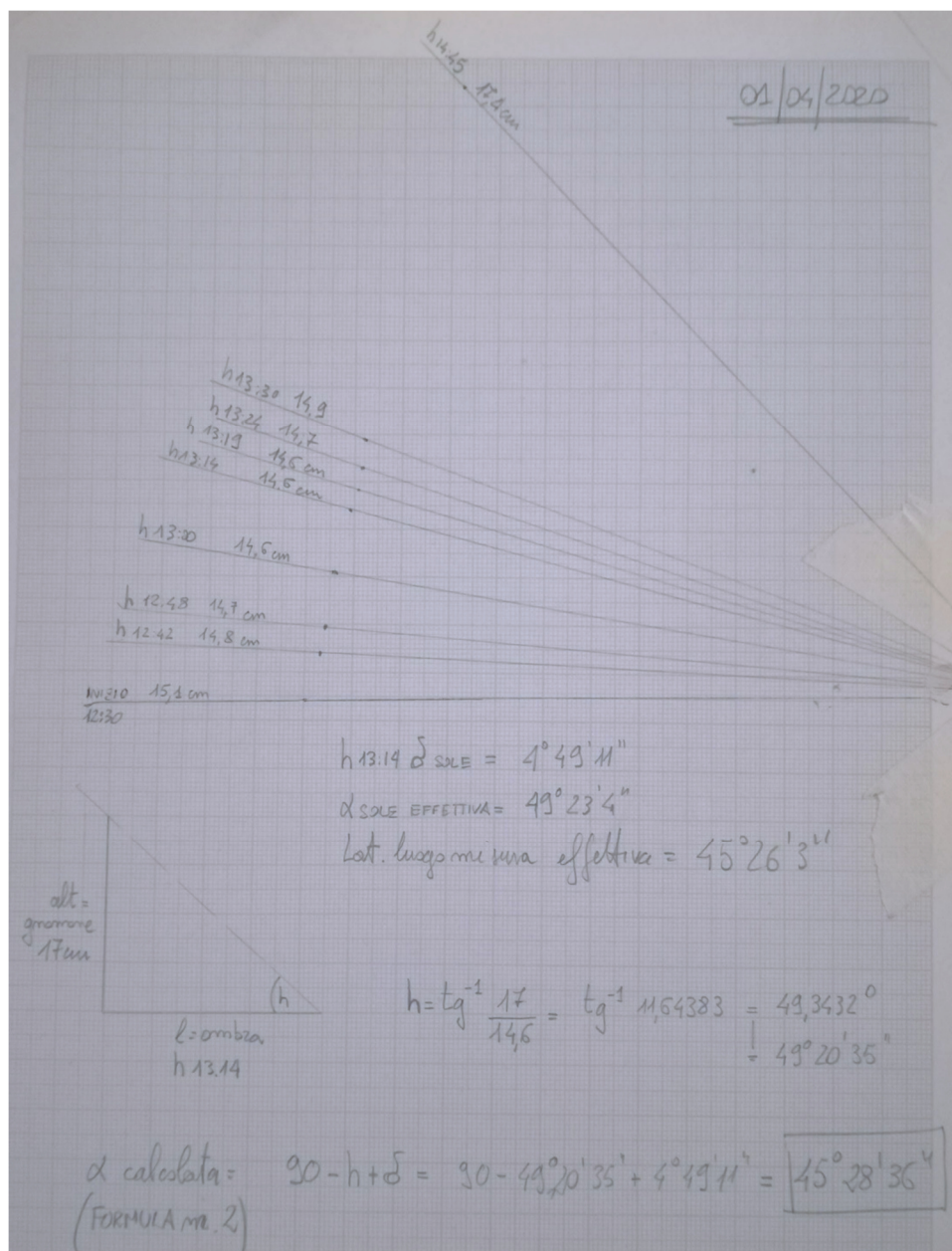
- 3) posizionare il nostro “strumento” di calcolo verso il Sole facendo attenzione che non vi siano ostacoli davanti (alberi, case) che possano impedire al Sole di illuminare lo strumento
- 4) iniziare verso le ore 11:30 “solari” e segnare sulla carta un puntino in corrispondenza del punto più estremo dell’ombra dello gnomone



- 5) Procedere ogni 5 minuti con le misurazioni fino a quando noterete il formarsi di una curva come detto prima

- 6) Misurare quindi la distanza tra il punto di questa curva più vicino allo gnomone e il gnomone stesso. QUESTA E' LA MISURA DI RIFERIMENTO.

Di seguito un esempio pratico che mostra il calcolo della latitudine alcuni giorni dopo l'equinozio di primavera. L'errore commesso è di circa 2' ovvero meno di 4 Km.



Per qualsiasi domanda, chiarimento, integrazione o segnalazione di errori contattatemi pure tramite l'associazione o direttamente all'indirizzo e-mail: riccardofecchio78@gmail.com

BUON DIVERTIMENTO

Padova, 6 giugno 2020

Riccardo

Immagini] Riferimenti:

- [1] <https://library.weschool.com/>
- [2], [3] <http://www.liceocecioni.gov.it/>
- [4], [6], [9], [11] <https://web.infn.it/> - Riccardo Musenich
- [5], [14] <http://www.brera.inaf.it/> - Copyright: Danilo Pivato
- [8], [10] <http://www.arcetri.astro.it/> - Alessandro Marconi